

ĐỀ BÀI TẬP: Chương thế phẳng

Một chuyển động phẳng có thể trong mặt phẳng xoy được biểu thị bằng hàm thế vị phức $W(z)$ như sau:

$$W(z) = A.z^{-1}.$$

- 1) Tìm hàm thế $\varphi(r, \theta)$ và hàm dòng $\psi(r, \theta)$ trong tọa độ cực ? đây là chuyển động gì và nêu lên giá trị đặc trưng ?
- 2) Xác định họ các đường dòng và đường đẳng thế ?
- 3) Xác định đường dòng (C) khi $A = 4\text{m}^3/\text{s}$ và giá trị của $\psi = -2\text{m}^2/\text{s}$?
- 4) Tính vận tốc của điểm $M(r, \theta)$ nằm trên đường (C), có $\theta = \pi/4$. Vẽ đường dòng (C), điểm M và vận tốc tại M trong hệ trục tọa độ xoy.

GIẢI**Câu 1)**

Thế $z = r.e^{i\theta}$ vào $W(z)$, tính ra ta được:

$$W(z) = \frac{A}{r}.e^{-i\theta} = \frac{A}{r}(\cos(\theta) - i.\sin(\theta)) = \frac{A}{r}\cos(\theta) - \frac{A}{r}\sin(\theta).i$$

Từ đó ta suy ra:

$$\varphi(r, \theta) = \frac{A}{r}\cos(\theta); \quad \text{và} \quad \psi(r, \theta) = -\frac{A}{r}\sin(\theta) \quad (1)$$

Đặt

$$A = \frac{m_o}{2\pi} \quad (2)$$

công thức (1) trở thành:

$$\varphi(r, \theta) = \frac{m_o}{2\pi.r}\cos(\theta); \quad \text{và} \quad \psi(r, \theta) = -\frac{m_o}{2\pi.r}\sin(\theta) \quad (3)$$

Các phương trình (3) diễn tả hàm thế và hàm dòng của một lưỡng cực, có cường độ là m_o .

Câu 2)

$$\varphi(r, \theta) = \frac{m_o}{2\pi.r}\cos(\theta) = C_1 \quad \rightarrow$$

$$r = 2.R_1.\cos(\theta) ; \quad \text{với } R_1 = \frac{m_o}{4\pi.C_1} \quad (4)$$

Phương trình (4) chỉ ra các đường đẳng thế là các vòng tròn đi qua gốc tọa độ $O(0;0)$, có tâm nằm trên trục ox với bán kính là R_1 .

$$\psi(r,\theta) = -\frac{m_o}{2\pi.r}\sin(\theta) = C_2 \quad \rightarrow$$

$$r = 2.R_2.\sin(\theta) ; \quad \text{với } R_2 = -\frac{m_o}{4\pi.C_2} \quad (5)$$

Phương trình (5) chỉ ra các đường dòng là các vòng tròn đi qua gốc tọa độ $O(0;0)$, có tâm nằm trên trục oy với bán kính là R_2 .

Câu 3)

Thế $A = 4m^3/s$ vào (2), ta tính được $m_o = 8\pi (m^3/s)$.

Thay $m_o = 8\pi$ và $C_2 = \psi = -2m^2/s$ vào phương trình (5), ta được $R_2 = 1 (m)$.

Vậy đường dòng là vòng tròn qua gốc tọa độ có tâm nằm trên trục oy (phần dương), có bán kính là $1m$.

Câu 4)

Với $\theta = \frac{\pi}{4}$, từ (5), ta suy ra : $r = 2 \times 1 \times \sin(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$

Do đó: $M(\sqrt{2}; \frac{\pi}{4})$.

Ta có:

$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \quad \text{và} \quad u_\theta = -\frac{\partial \Psi}{\partial r}$$

Lấy đạo hàm riêng phần của ψ ở công thức (3) theo r và θ , ta được:

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{m_o \cdot \sin(\theta)}{2\pi \cdot r^2} \quad \text{và} \quad \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = -\frac{m_o \cdot \cos(\theta)}{2\pi \cdot r}$$

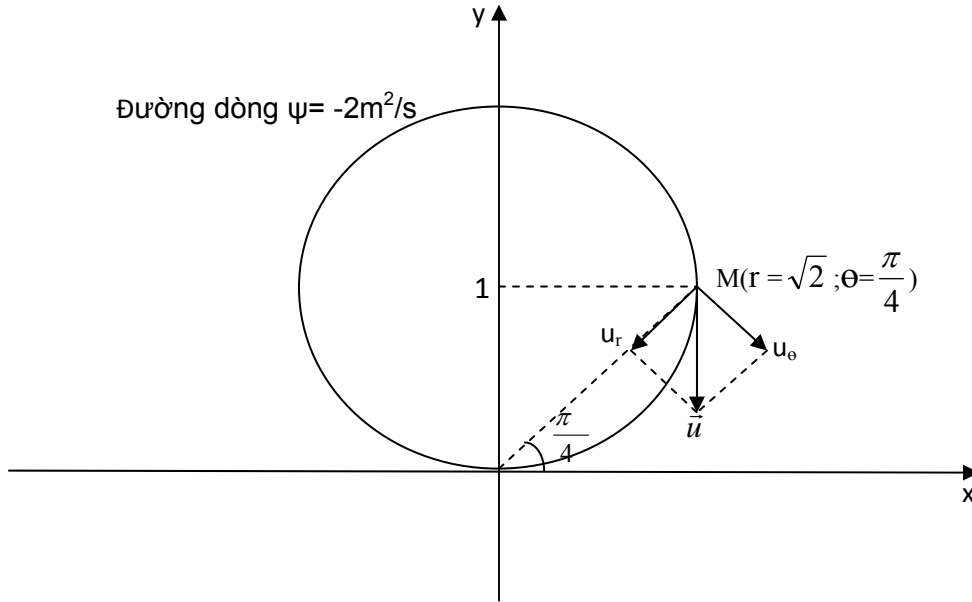
Suy ra:

$$u_r = -\frac{m_o \cdot \cos(\theta)}{2\pi \cdot r^2}; \quad \text{và} \quad u_\theta = -\frac{m_o \cdot \sin(\theta)}{2\pi \cdot r^2} \quad (6)$$

Thế $m_0 = 8.\pi$; $\theta = \frac{\pi}{4}$ và $r = \sqrt{2}$ vào công thức (6), ta được:

$$u_r = u_\theta = -\sqrt{2} \text{ m/s}$$

Đường dòng với $\psi = -2m^2/s$; điểm $M(\sqrt{2}; \frac{\pi}{4})$ và vận tốc \vec{u} tại điểm M được chỉ ra trong Hình 1.



Hình 1